М. М. Арсланов, И. И. Батыршин, М. М. Ямалеев, *CEA*-операторы и иерархия Ершова, *Изв. вузов. Матем.*, 2021, номер 8, 72–79

DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-8-72-79

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2021, № 8, с. 72–79 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

<u>*Краткое сообщение*</u>

М.М. АРСЛАНОВ, И.И. БАТЫРШИН, М.М. ЯМАЛЕЕВ

CEA-ОПЕРАТОРЫ И ИЕРАРХИЯ ЕРШОВА

Аннотация. Исследуются связи CEA иерархии и иерархии Ершова в Δ^0_2-степенях. Изучается давняя проблема, поднятая в [1] о существовании низкой вычислимо перечислимой (в. п.) степени $\mathbf{a}$, для которой класс всех не вычислимо перечислимых $CEA(\mathbf{a})$ степеней не содержит 2-в. п. степеней. Данная проблема решена путем доказательства более сильного результата: существует такая невычислимая низкая в. п. степень $\mathbf{a}$, что любая $CEA(\mathbf{a})$ ω-в. п. степень является в. п. Также обсуждаются связанные с этой проблемой вопросы и возможные обобщения полученного результата.

Ключевые слова: относительная перечислимость, вычислимо перечислимое множество, иерархия Ершова, низкое множество.

УДК: 510.535

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-8-72-79

Введение

В работе исследуются связи CEA иерархии и иерархии Ершова, введеной в [2]–[4], все рассматриваемые степени тьюринговые. Множество A принадлежит конечному уровню n иерархии Ершова (A является n-в. п.), если его характеристическая функция меняет свое значение не более n раз, т. е. существует такая вычислимая функция $f(x, s)$, что для всех x выполняется $f(x, 0) = 0$, $\lim_s f(x, s) = A(x)$ и $|\{s : f(x, s) \neq f(x, s + 1)\}| \leq n$. Степень $\mathbf{c}$ называется $CEA(\mathbf{a})$, если $\mathbf{c}$ вычислимо перечислима относительно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$. Если при этом $\mathbf{a} < \mathbf{c}$, то $\mathbf{c}$ называется собственной $CEA(\mathbf{a})$. В статье [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Р. Соар и М. Стоб [5])**.** *Для любой невычислимой низкой в. п. степени* $\mathbf{a}$ *существует степень* $\mathbf{b}$*, которая является* $CEA(\mathbf{a})$*, но не является в. п. степенью.*

Также в этой статье было высказано утверждение, что модификация доказанной теоремы позволит сделать степень $\mathbf{c}$ 2-в. п. Впоследствии авторы отозвали это утверждение, и вопрос

Поступила в редакцию 18.06.2021, после доработки 18.06.2021. Принята к публикации 29.06.2021.

Благодарности. Работа М.М. Арсланова и М.М. Ямалеева выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2021-1393). Работа И.И. Батыршина поддержана грантом Российского научного фонда (проект No. 18-11-00028). Авторы выражают благодарность М.Х. Файзрахманову за полезные советы и комментарии на начальной стадии работы. М.М. Ямалеев также благодарен Г. Ву за серию полезных обсуждений работ [1] и [5].

о существовании низкой в. п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, для которой класс всех не в. п. $CEA(\mathbf{a})$ степеней не содержит 2-в. п. степеней, оставался открытым (см. [1], [6]).

В данной работе доказывается, что существует такая невычислимая низкая в. п. степень $\mathbf{a}$, что любая $CEA(\mathbf{a})$ ω-в. п. степень является в. п. степенью. Из этого следует, что $CEA(\mathbf{a})$ степень $\mathbf{c}$, построенная для низкой в. п. степени $\mathbf{a}$ в [5], не может быть 2-в. п. Отметим, что М.Х. Файзрахманов в 2012 году также сообщал о доказательстве этого результата, но не публиковал его.

В статье используются определения и обозначения, содержащиеся в [7] и [8]. Подробное изложение свойств иерархии Ершова и CEA иерархии содержится в [2], [3], [6] и в [9], соответственно.

1. Основной результат и идеи доказательства

Теорема 2. *Существует такое невычислимое низкое в. п. множество A, что любое множество, являющееся $CEA(A)$ и 2-в. п., имеет в. п. степень.*

Схема доказательства. Построим требуемые в. п. множество A и вспомогательные в. п. множества $C_{e,n}$, удовлетворяющие следующим требованиям.

1.1. Требования.

$\mathcal{P}_e$: $A \neq \Theta_e$ (для каждого частично вычислимого (ч.в.) функции Θ_e),

$\mathcal{N}_e$: $(\exists^\infty s)$ $(\Psi_e^A(e)[s]\downarrow \Rightarrow \Psi_e^A(e)\downarrow)$ (для каждого ч.в. функционала Ψ_e),

$\mathcal{R}_{e,n}$: $D_e = W_n^A \Rightarrow\ \exists$ в. п. $C_{e,n}$ $(C_{e,n} \leq_T A \oplus D_e$ & $D_e \leq_T A \oplus C_{e,n})$ (для каждого множества $W_n^A = \mathrm{dom}(\Phi_n^A)$, в. п. относительно A, и каждого 2-в. п. множества D_e мы строим вспомогательное в. п. множество $C_{e,n}$),

где $\{\langle \Phi_e, \Psi_e, \Theta_e, D_e\rangle : e \in \omega\}$ является стандартной нумерацией всех кортежей $\langle \Phi, \Psi, \Theta, D\rangle$, в которых Φ и Ψ являются ч. в. функционалами, Θ является ч. в. вычислимой функцией, и D является 2-в. п. множеством.

Полная конструкция использует дерево стратегий, каждая вершина которого будет соответствовать стратегиям удовлетворения требований: вершины π будут обозначать стратегии требований $\mathcal{P}$, вершины η — стратегии требований $\mathcal{N}$, вершины ρ — стратегии требований $\mathcal{R}$.

Стратегии удовлетворения требований $\mathcal{P}_e$ и $\mathcal{N}_e$ являются стандартными. Для удовлетворения $\mathcal{P}_e$ выбираем некоторого свидетеля p, и если на шаге s имеем $\Theta_e(p)[s] = 0$, то перечисляем p в A. Для удовлетворииния $\mathcal{N}_e$ используем стратегию построения низкого множества: на шаге s пытаемся запретить другим стратегиям перечислять элементы $\leq \psi_e(e)[s]$, т. е. не превосходящие use-функции вычисления $\Psi_e^A(e)[s] = \Psi_{e,s}^{A_s}(e)$. Если $\Psi_e^A(e)[s]\downarrow$, и $\mathcal{N}_e$ не позволит впоследствии никаким $x \leq \psi_e(e)[s]$ изменить $A(x)$, тогда $A \upharpoonright \psi_e(e)[s] = A_s \upharpoonright \psi_e(e)[s]$, поэтому $\Psi_e^A(e)\downarrow$.

Стратегии удовлетворения $\mathcal{P}_e$ и $\mathcal{N}_e$ действуют только конечное число раз, поэтому имеют только единственный выход на дереве стратегий, обозначаемый fin.

Базовая стратегия для требования $\mathcal{R}_{e,n}$. Строим такое в. п. множество $C_{e,n}$, которое обеспечит $C_{e,n} \leq_T A \oplus D_e \& D_e \leq_T A \oplus C_{e,n}$ (если $D_e = W_n^A$). Обозначим соответствующие сводящие функционалы как $\Gamma_{e,n}$ и $\Delta_{e,n}$, т. е. $C_{e,n} = \Gamma_{e,n}^{A\oplus D_e}$ и $D_e = \Delta_{e,n}^{A\oplus C_{e,n}}$.

Используем ω-последовательность циклов x, каждый из которых действует следующим образом. Далее, очевидные индексы будем опускать. Для удобства нижеследующие пункты будем называть этапами.

(1) Ждем такого шага s_0, что $D(x)[s_0] = W^A(x)[s_0] = 0$.

(2) Выбираем “большие” числа $c(x) \notin C[s_0]$, $a(x) \notin A[s_0]$, определяем $\Gamma^{A\oplus D}(c(x))[s_0] = 0$ и $\Delta^{A\oplus C}(x)[s_0] = 0$ с use-функциями $\gamma(c(x))[s_0] > a(x) > x$ и $\delta(x)[s_0] > c(x)$.
(3) Ждем, когда x перечислится в D, и $D(x)[s_1] = W^A(x)[s_1] = 1$ восстановится на некотором шаге $s_1 > s_0$.
(4) Перечисляем $c(x)$ в C и определяем $\Delta^{A\oplus C}(x)[s_1] = 1$, $\Gamma^{A\oplus D}(c(x))[s_1] = 1$.
(5) Ждем, когда x покинет D, и $D(x)[s_2] = W^A(x)[s_2] = 0$ восстановится на некотором шаге $s_2 > s_1$ (отметим, что это может произойти, только если некоторая стратегия перечислит какой-то элемент в $A \upharpoonright \varphi(x)[s_1]$).
(6) Перечисляем $a(x)$ в A, что позволяет определить $\Delta^{A\oplus C}(x)[s_2] = 0$ и сохранить $\Gamma^{A\oplus D}(c(x))[s_2] = 1$.

Стратегия имеет следующие возможные выходы.

А. В процессе конструкции будет открыто только конечное число циклов. Это означает, что $D \neq W^A$. Обозначаем этот выход через fin.

Б. В процессе конструкции будет открыто бесконечно много циклов. Тогда обеспечим $A \oplus D \equiv_T A \oplus C$ с помощью функционалов Γ и Δ. Обозначим этот выход через ∞.

1.2. **Взаимодействие между стратегиями.** Стратегии требований вида $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ не нарушают друг друга напрямую: и те, и другие выбирают новые неиспользованные числа для перечисления их в A. Однако при этом, перечисляя своих свидетелей в A, стратегии требований $\mathcal{P}$ могут изменить $W^A(z)$ для некоторого цикла z стратегии требования $\mathcal{R}$ и тем самым заставить ее перечислить $a(z)$ в A; $a(z)$ может изменить $W^A(x)$ для некоторого другого цикла x, тем самым заставить ее перечислить $a(x)$ в A, и т. д. Как и в статье [1], произойдет *каскад* изменений. В частности, свидетель p стратегии требования $\mathcal{P}$ может быть “большим”, в то время как x и $a(x)$ могут быть “маленькими”, что является потенциальной проблемной для стратегий требований $\mathcal{N}$.

Стратегии требований $\mathcal{N}$ с большим приоритетом могут помешать стратегиям требований $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ только конечное число раз. Если стратегия требования $\mathcal{R}$ имеет выход fin, то она также может нарушить стратегию требования $\mathcal{N}$ только конечное число раз.

Основная трудность заключается в следующем. Предположим, что $\rho^\frown\infty \subseteq \eta \subset \pi$, где ρ, η и π являются стратегиями $\mathcal{R}$-, $\mathcal{N}$- и $\mathcal{P}$-требований соответственно, и рассмотрим следующую последовательность событий.

(1) На шаге s_0 стратегия ρ переходит на этап 2 для некоторого цикла x и выбирает $a(x)$.
(2) После этого на шаге $s_1 > s_0$ стратегия η запрещает $a(x)$, чтобы сохранить свои $\psi_e(e)[s_1]$ незименными (отметим, что стратегия ρ не может отказаться от $a(x)$).
(3) После этого на шаге $s_2 > s_1$ стратегия π выбирает свидетеля $p \notin A[s_2]$.
(4) После этого на шаге $s_3 > s_2$ стратегия ρ переходит на этап 3, при этом $\varphi(x)[s_3] > p$, и осуществляет действия, предусмотренные этапом 4.
(5) После этого на шаге $s_4 > s_3$ стратегия π перечисляет p в A для диагонализации Θ. Это предоставляет стратегии ρ возможность перейти на этап 5 и вынуждает ее осуществить действия, предусмотренные этапом 6, а именно перечислить $a(x)$ в A, нарушая тем самым стратегию η.

Более того, может быть бесконечно много $\mathcal{P}$-стратегий $\pi' \supset \eta$, каждая из которых может действовать подобным образом, нарушая стратегию η путем каскадов с участием стратегии ρ. Другими словами, каждый раз некоторый $a(x) < r$, где r является запретом стратегии η, может быть перечислен в A из-за каскадов, вызванных свидетелем $p_{\pi'}$.

Основная идея для преодоления этой трудности заключается в следующем. Стратегия π отказывается от своего свидетеля p и выбирает нового свидетеля p' на каждом шаге s с новым вычислением $\Phi^A(x)[s]$ цикла x стратегии ρ, на котором $\varphi(x)[s] > p$ и $a(x)$ запрещен стратегией η. Поскольку стратегия η запрещает только конечное число элементов, пусть r будет наибольшим таким элементом, и пусть s_0 – наименьший шаг, на котором стратегия η запрещает r. Найдется только конечное число таких циклов x, что $a(x)[s_0] < r$. Пусть k – количество таких циклов, тогда, после шага s_0 стратегия π может быть вынуждена выбрать нового свидетеля максимум k раз (каждый раз, когда один из циклов x перечисляется в D, соответствующее вычисление $\Phi^A(x)$ завершается), поскольку D является 2-в. п.

Другая трудность заключается в следующем: когда стратегия π перечисляет свидетеля p в A, это может вызвать каскад изменений в A, который в итоге нарушит работу стратегии η. Например, может быть два таких цикла $x < z$, что $a(x) < r$ (где r – наибольший элемент, запрещенный стратегией η), и $a(z) > r$, однако $p < \varphi(z)$ и $a(z) < \varphi(x)$. Перечисляя p в A, стратегия π может вынудить стратегию ρ перечислить $a(z)$ в A, и, поскольку $a(z) < \varphi(x)$, это в свою очередь может вынудить ρ перечислить $a(x)$ в A, нарушая стратегию η.

Идея для преодоления этой трудности взята из [1]. Стратегии ρ должны проделать дополнительную работу для каждого цикла z, для которого $p < \varphi(z)$ и $r < a(z)$: они будут пытаться сделать $a(z)$ больше, чем $\varphi(x)$ для всех $x < z$, для которых $x \in D$. Так, если на некотором цикле $x < z$ на шаге s стратегия должна перейти с этапа 3 на этап 4 (при этом $\Phi^A(x)[s]\downarrow$ и $\varphi(x) > a(z)$), то она делает это не сразу, а сначала предпринимает дополнительные действия: перечисляет $a(z)$ в A, перечисляет $c(z)$ в C, возвращает цикл x на этап 3, а на цикле z переопределяет вычисление $\Gamma^{A\oplus D}(z)$ навсегда. После этого цикл z ждет расширяющего шага и снова начинает с этапа 2, выбирая новые $a(z)$ и $c(z)$. Поскольку это происходит только на расширяющих шагах, новый выбранный $a(z)$ будет больше, чем $\varphi(x)$. Эти дополнительные действия позволяют *очистить* цикл x от всех каскадов цикла z.

Отметим, что доказательство теоремы основано на том, что для любого x множество $D \upharpoonright x$ изменяется только конечное число раз, и не требует, чтобы таких изменений было не более двух для каждого элемента. В связи с этим доказательство оказывается верным и для каждого класса Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимого относительно $\emptyset'$, т. е. верна следующая более общая

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{U}$ – класс Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимый относительно $\emptyset'$. Тогда существует такая невычислимая низкая в. п. степень $\mathbf{a}$, что любое $CEA(\mathbf{a})$ множество $D \in \mathcal{U}$ имеет в. п. степень.*

Напомним, что множества из Σ^{-1}_a уровня иерархии Ершова (для любого $a \in \mathcal{O}$ из клиниевской системы обозначений) образуют класс Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимых относительно $\emptyset'$ (см., например, работы [3], [10], [11]). Поэтому в теореме 3 в качестве класса $\mathcal{U}$ можно выбрать любой Σ^{-1}_a или Π^{-1}_a уровень иерархии Ершова.

2. Степени SS-множеств и иерархия Ершова

2.1. CEA **иерархия для низких и супернизких степеней.** Для удобства для каждого невычислимого в. п. низкого множества A будем называть множество B, построенное в теореме 1, *SS(A)-множеством.*

Напомним следующую теорему, устанавливающую связь между относительной перечислимостью и уровнями иерархии Ершова.

Теорема 4 (М.М. Арсланов, Дж. ЛаФорт, Т. Сламан [12])**.** *Любая ω-в. п. степень $\mathbf{c}$, которая является $CEA(\mathbf{a})$ для некоторой в. п. степени $\mathbf{a}$, является 2-в. п. степенью.*

Эта теорема позволяет получить из теоремы 2

Следствие. Существует такая невычислимая низкая в. п. степень $\mathbf{a}$, что любая $CEA(\mathbf{a})$ ω-в. п. степень является в. п.

Заметим, что по теореме 4 для любого в. п. множества A и любого ω-в. п. множества C, которое обладает $CEA(A)$ степенью, существует 2-в. п. множество $D \equiv_T C$, которое также является $CEA(A)$. Поэтому степень множества, построенного в теореме 2, обладает требуемыми свойствами.

Множество является *супернизким* [13], если $A' \equiv_{tt} \emptyset'$. Напомним следующие теоремы.

Теорема 5 (Х. Карстенс [14]). *Для любого множества A верно, что $A \leq_{tt} \emptyset'$ тогда и только тогда, когда A является ω-в. п.*

Теорема 6 (Ю.Л. Ершов [4]). *Если $A \in \Sigma_a^{-1}$ для некоторого $a \in \mathcal{O}$ и $C \leq_m A$, то $C \in \Sigma_a^{-1}$.*

Теорема 7 (М.М. Арсланов [6]). *Пусть A супернизкое невычислимое в. п. множество. Тогда любое $SS(A)$-множество C имеет 2-в. п. степень.*

Поскольку A является супернизким, то $A' \leq_{tt} \emptyset'$, поэтому по теореме 5 множество A' является ω-в. п. Если C является $SS(A)$-множеством (т. е. C в. п. относительно A), то $C \leq_m A'$. По теореме 6 множество C является ω-в. п. Поэтому по теореме 4 оно имеет 2-в. п. степень.

Из этих теорем следует, что множество, построенное в теореме 2, не является супернизким.

Предложение. Пусть A невычислимое в. п. множество. Тогда существует такое в. п. множество A_1, что $\emptyset <_T A_1 <_T A$ и A_1' является ω-в. п.

Схема доказательства. Искомое в. п. множество $A_1 \leq_T A$ диагонализируем против $\Phi_e, e \in \omega$, следующим образом: вычисляем $\Phi_e(x_i)$ для всё больших и больших чисел $x_1, x_2, \ldots$, пока не найдем такое x_i, что $\Phi_e(x_i) \downarrow$ и $\neq 0$. В этом случае запрещаем перечислять x_i в A_1 и останавливаем эту процедуру. Если это никогда не произойдет, то или Φ_e является частичной функцией, или для некоторого i найдется такое число $y \leq x_i$, которое будет перечислено в A позднее (если это никогда не произойдет, то A будет вычислимым, что противоречит выбору A), и тогда мы перечислим x_i в A_1.

Комбинируем эту стратегию со стандартной стратегией построения низкого множества и используем стандартный метод приоритета для разрешения конфликтов между этими стратегиями. Поскольку запреты каждой стратегии построения низкого множества могут быть нарушены требованиями более высокого приоритета, как легко проверить, не более $n+1$ раз, то множество A' является ω-в. п.

Теорема 8. *Существуют такие низкие в. п. степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, что $\mathbf{0} < \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, и для любой степени $\mathbf{c}$, в. п. относительно $\mathbf{a}$, если $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$, то $\mathbf{c}$ является в. п.*

Пусть степень $\mathbf{b}$ содержит множество, построенное в теореме 2. По предложению можем найти требуемую степень $\mathbf{a}$. Покажем, что эта пара множеств удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, если $\mathbf{c} \geq \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ является $CEA(\mathbf{a})$, то она является $CEA(\mathbf{b})$. Поскольку $\mathbf{a}$ является супернизким, степень $\mathbf{c}$ будет 2-в. п. по теореме 7. Поэтому степень $\mathbf{c}$ является в. п. по выбору $\mathbf{b}$.

2.2. CEA **степени и трансфинитные уровни иерархии Ершова.** В [15] теорема 4 была обобщена на трансфинитные уровни иерархии Ершова.

Теорема 9 (И.И. Батыршин [15]). *Любая Δ_v^{-1}-степень $\mathbf{c}$, которая является $CEA(\mathbf{a})$ для в. п. степени $\mathbf{a}$, является также Σ_u^{-1}-степенью, где $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $u <_{\mathcal{O}} v$, $|u|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, $n > 0$.*

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть $A > \emptyset$ является таким низким в. п. множеством, что $A' \in \Delta_v^{-1}$, где $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $n > 0$. Тогда любое $SS(A)$-множество C имеет Σ_u^{-1}-степень, где $u <_{\mathcal{O}} v$, $|u|_{\mathcal{O}} = \omega^n$.*

Поскольку C является $SS(A)$-множеством, т. е. C в. п. относительно A, то $C \leq_m A'$. В силу теоремы 6 имеем $C \in \Delta_v^{-1}$. Согласно теореме 9 множество C имеет Σ_u^{-1}-степень.

Отметим, что эта теорема верна также в естественной системе обозначений для ординалов ниже ω^ω, в которой верна также

Теорема 11 (М.Х. Файзрахманов [16]). *Пусть $A \subset \omega$.*
(i) *Если $A' \in \Pi_a^{-1}$ для $a \in C$, то $A' \in \Delta_a^{-1}$.*
(ii) *Если $n > 0$ и $A' \in \Sigma_{\omega^n}^{-1}$, то $A' \in \Delta_{\omega^n}^{-1}$.*
(iii) *Если $m, n > 0$ и $A' \in \Sigma_{\omega^n m}^{-1}$, то $A' \in \Delta_{\omega^n}^{-1}$.*

Теорема 11 вместе с теоремами 7 и 10 позволяет следующим образом классифицировать степени SS-множеств в терминах иерархии Ершова для естественной системы обозначений ординалов ниже ω^ω.

Теорема 12. *Для любой невычислимой низкой в. п. степени A, если A' принадлежит уровню иерархии Ершова ниже ω^ω для естественной системы обозначений для ординалов, то любое $SS(A)$-множество C имеет или 2-в. п. степень, или $\Sigma_{\omega^n}^{-1}$-степень для некоторого $n > 0$.*

2.3. **Изолированность и CEA иерархия.** Напомним, что 2-в. п. степень $\mathbf{d}$ называется изолированной [17], если все в. п. степени ниже $\mathbf{d}$ имеют наибольшую в. п. степень $\mathbf{a}$ (в этом случае говорят, что $\mathbf{a}$ *изолирует* $\mathbf{d}$). Изолированные степени изучались в работах [17]–[19], [1], в частности, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 13 (М.М. Арсланов, С. Лемпп, Р. Шор [1]). *Существует такое неполное невычислимое в. п. множество A, что любое $CEA(A)$ Δ_2^0-множество имеет в. п. степень.*

Теорема 14 (М.М. Арсланов, С. Лемпп, Р. Шор [19]). *Для любой невычислимой в. п. степени $\mathbf{c}$ существует невычислимая в. п. степень $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, которая не изолирует никакую собственную $CEA(\mathbf{a})$ степень.*

Теорема 15 (М.М. Арсланов, С. Лемпп, Р. Шор [19]). *Если $\mathbf{c}$ является $CEA(\mathbf{0}')$, то существует невычислимая в. п. степень $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}' = \mathbf{c}$, которая не изолирует никакую собственную $CEA(\mathbf{a})$ степень.*

Из этого, в частности, следует существование невычислимой низкой в. п. степени $\mathbf{a}$, которая не изолирует никакую собственную $CEA(\mathbf{a})$ степень. Поэтому возникает естественный вопрос, верно ли, что каждая невычислимая в. п. степень $\mathbf{a}$ изолирует степень $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ со следующим свойством "*слабой изолированности*": может ли степень $\mathbf{d}$ содержать разность $B - C$ двух таких множеств B и C, что $C \subset B$ и оба множества в. п. относительно $\mathbf{a}$?

Следующая теорема дает частичный отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 16. *Существует в. п. множество A такое, что $\emptyset <_T A <_T \emptyset'$, и если выполнено $A <_T B - C \leq_T \emptyset'$ для некоторых множеств $B \supset C$, перечислимых относительно A, то $A <_T W <_T B - C$ для некоторого в. п. множества W.*

Схема доказательства. В [19] было доказано, что существует неполная невычислимая в. п. степень $\mathbf{a}$ такая что, любая степень $\mathbf{d}$, которая CEA в $\mathbf{a}$ и вычислима в $\mathbf{0}'$, является в. п. степенью (также этот результат был приведен в качестве теоремы 13).

Сперва заметим, что степень $\mathbf{a}$ не может изолировать никакую 2-в. п. степень выше $\mathbf{a}$. Действительно, предположим, что некоторая собственная 2-в. п. $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ изолируется степенью $\mathbf{a}$ (случай, когда степень $\mathbf{d}$ в. п., тривиален ввиду теоремы Сакса о плотности). Существует в. п. степень $\mathbf{f} < \mathbf{d}$ такая, что $\mathbf{d}$ в. п. относительно $\mathbf{f}$. Тогда либо $\mathbf{f} \leq \mathbf{a}$ (и, значит, $\mathbf{d}$ в. п. относительно $\mathbf{a}$, а по теореме 13 и вовсе в. п., что приводит к противоречию), либо $\mathbf{a} < \mathbf{a} \cup \mathbf{f} < \mathbf{d}$ (что противоречит выбору $\mathbf{d}$).

Докажем, что $\mathbf{a}$ имеет следующее искомое свойство: над $\mathbf{a}$ не существует степеней $\mathbf{d}$ (не являющихся в. п.) таких, что $\mathbf{d}$ изолируется $\mathbf{a}$ и содержит разность $B - C$, где $C \subset B$ являются в. п. относительно $\mathbf{a}$.

Выберем произвольное в. п. множество $A \in \mathbf{a}$. Для получения противоречия предположим, что существуют множества $C \subset B$, которые в. п. относительно A и такие, что

1) $B - C \not\leq_T A$ и $B - C \leq_T \emptyset'$;
2) $W_e \leq_T A \oplus (B - C) \ \Rightarrow\ W_e \leq_T A$.

Пусть $E = B - C$ и $E_s = B_s - C_s$ для некоторых A-вычислимых перечислений $B = \{B_s\}_{s\in\omega}$ и $C = \{C_s\}_{s\in\omega}$. Определим $M = \{\langle x, s\rangle \mid x \in E_s - E\}$. Нетрудно видеть, что

(a) $\omega - M$ является в. п. относительно A: $\langle x, s\rangle \in \omega - M \iff x \notin E_s \vee x \in C$,
(b) E в. п. в $M \oplus A$: $x \in E \iff (\exists s)[x \in E_s \& \langle x, s\rangle \notin M]$, и
(c) $A \leq_T M \oplus A \leq_T E \oplus A$.

Степень множества $M \oplus A$ является $CEA(\mathbf{a})$. Тогда согласно выбору A имеем, что $M \oplus A$ имеет в. п. степень. Применим условие 2). Ввиду того, что $M \oplus A \leq_T E \oplus A$, и $M \oplus A$ имеет в. п. степень, получаем $M \oplus A \leq_T A$. Поэтому E в. п. относительно $M \oplus A \equiv_T A$. Согласно выбору A множество E также имеет в. п. степень. По условию 2) получаем $E \leq_T A$, что противоречит условию 1).

Литература

[1] Arslanov M.M., Lempp S., Shore R.A. *Interpolating d-r.e. and REA degrees between r.e. degrees*, Ann. Pure and Appl. Logic **78**, 29–56 (1996).
[2] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств,* I, Алгебра и логика **7** (1), 47–73 (1968).
[3] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств,* II, Алгебра и логика **7** (4), 15–47 (1968).
[4] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств,* III, Алгебра и логика **9** (1), 34–51 (1970).
[5] Soare R.I., Stob M. *Relative computable enumerability*, in: *Proceedings of the Herbrand symposium, Logic Colloquium'81*, ed. by J. Stern, 299–324 (North-Hollad, Amsterdam, 1982).
[6] Arslanov M.M. *The Ershov hierarchy*, in: *Computability in Context: Computation and Logic In the Real World*, ed. by S.B. Cooper, A. Sorbi, 49–101 (Imperial College Press, London, 2011).
[7] Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени* (Казанск. матем. о-во, Казань, 2000).
[8] Downey R.G., Hirschfeldt D.R. *Algorithmic Randomness and Complexity*, in: *Theory and Appl. of Computability* (Springer, New York, 2010).
[9] Jockusch Jr. C.G., Shore R.A. *Pseudojump operators* II*: transfinite iterations, hierarchies, and minimal covers*, J. Symb. Logic **49**, 1205–1236 (1984).
[10] Селиванов В.Л. *Об иерархии Ершова*, Сиб. матем. журн. **26** (1), 134–149 (1985).
[11] Оспичев С.С. *Фридберговы нумерации в иерархии Ершова*, Алгебра и логика **54** (4), 283–295 (2015).
[12] Arslanov M.M., LaForte G.L., Slaman T.A. *Relative recursive enumerability in the difference hierarchy*, J. Symb. Logic **63** (2), 411–420 (1998).
[13] Bickford M., Mills C. *Lowness properties of r.e. sets,* Preprint (University of Wisconsin, Madison, 1982).
[14] Carstens H.G. Δ_2^0*-mengen*, Arch. Math. Log. Grundlag **18**, 55–65 (1978).
[15] Батыршин И.И. *Относительная перечислимость в иерархии Ершова*, Матем. заметки **84** (4), 506–515 (2008).
[16] Файзрахманов М.Х. *Тьюринговые скачки в иерархии Ершова*, Алгебра и логика **50** (3), 399–414 (2011).
[17] Cooper S.B., Yi X. *Isolated d-r.e. degrees,* Preprint (The University of Leeds, Leeds, 1996).
[18] LaForte G.L. *The isolated d-r.e. degrees are dense in the r.e. degrees*, Math. Log. Quart. **42**, 83–103 (1995).

[19] Arslanov M.M., Lempp S., Shore R.A. *On isolating r.e. and isolated d-r.e. degrees*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **224**, 61–80 (1996).

Марат Мирзаевич Арсланов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Marat.Arslanov@kpfu.ru

Ильнур Ильдарович Батыршин

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: batyrshin@gmail.com

Марс Мансурович Ямалеев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

M.M. Arslanov, I.I. Batyrshin, and M.M. Yamaleev

CEA operators and the Ershov hierarchy

Abstract. We examine the relationship between the CEA hierarchy and the Ershov hierarchy within Δ^0_2 Turing degrees. We study the long-standing problem raised in [1] about the existence of a low computably enumerable (c.e.) degree $\mathbf{a}$ for which the class of all non-c.e. $CEA(\mathbf{a})$ degrees does not contain 2-c.e. degrees. We solve the problem by proving a stronger result: there exists a noncomputable low c.e. degree $\mathbf{a}$ such that any $CEA(\mathbf{a})$ ω-c.e. degree is c.e. Also we discuss related questions and possible generalizations of this result.

Keywords: relative enumerability, computably enumerable set, Ershov's hierarchy, low degree.

Marat Mirzaevich Arslanov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Marat.Arslanov@kpfu.ru

Ilnur Ildarovich Batyrshin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: batyrshin@gmail.com

Mars Mansurovich Yamaleev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru