

УДК 621.313.333

## Математическое моделирование режимов работы многофазных синхронных двигателей с постоянными магнитами

В.А. Мартынов, А.Н. Голубев, А.В. Алейников  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
г. Иваново, Российская Федерация  
E-mail: zav@toe.spu.ru, alenikgo@yandex.ru

### Авторское резюме

**Состояние вопроса:** Математическое моделирование  $m$ -фазных синхронных двигателей ( $m > 3$ ) основано на допущениях о гладком воздушном зазоре машины и отсутствии насыщения магнитопровода, что снижает степень корректности исследования их энергетических и виброшумовых характеристик. В связи с этим необходимо наличие адекватного математического описания  $m$ -фазного синхронного двигателя.

**Материалы и методы:** Используются дифференциальные уравнения электрического состояния ветвей и электромагнитного момента  $m$ -фазного синхронного двигателя.

**Результаты:** Предложена математическая модель  $m$ -фазного синхронного двигателя с постоянными магнитами, учитывающая реальное распределение магнитного поля в активной зоне машины с учетом насыщения магнитной цепи, дискретного распределения многофазной обмотки статора по пазам и перемещения зубчатого сердечника статора относительно ротора с постоянными магнитами.

**Выводы:** Разработанная математическая модель  $m$ -фазного СДПМ позволяет анализировать его статические и динамические режимы работы с учетом реального распределения магнитного поля в активной зоне машины. Предложенный вариант построения синхронного электропривода позволяет улучшить его энергетические и виброшумовые характеристики.

**Ключевые слова:** синхронный электропривод, многофазный синхронный двигатель, виброшумовые характеристики.

## Mathematical Simulation of Operational Modes of Polyphase Synchronous Drives with Permanent Magnets

V.A. Martynov, A.N. Golubev, A.V. Aleynikov  
Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation  
E-mail: zav@toe.spu.ru, alenikgo@yandex.ru

### Abstract

**Background:** Mathematical simulation of  $m$ -phase synchronous drive ( $m > 3$ ) is based on the assumption of smooth air clearance and absence of magnetic circuit saturation. Thus, it reduces the research accuracy of their energy and vibronoise characteristics. As a result, it is important to develop the mathematical description of  $m$ -phase synchronous drive.

**Materials and methods:** The authors use the differential equations of the branches electric state and electromagnetic torque of the  $m$ -phase synchronous drive.

**Results:** The mathematical model of  $m$ -phase synchronous drive with permanent magnets which takes into account the actual distribution of magnetic field in the core, saturation of magnetic circuit, discrete distribution of polyphase stator winding in slots and tooth stator core movement relative to the rotor with permanent magnets.

**Conclusions:** The developed mathematical model of  $m$ -phase synchronous drive with permanent magnets allows to analyze its static and dynamic operation modes according to actual distribution of magnetic field in active core. The offered way to construct the synchronous electric drive helps to improve its power and vibronoise characteristics.

**Key words:** synchronous electrical drive, polyphase synchronous drive, vibronoise characteristics.

Решение задачи построения регулируемого электропривода (ЭП) переменного тока с высокими требованиями к точности отработки сигналов задания в статических и динамических режимах, диапазону регулирования скорости, с оптимизированными энергетическими показателями при имеющей место сложности двигателя как объекта управления приводит к конструктивно-технической сложности электромеханической системы в целом. При рассмотрении ЭП как целостного функционального элемента с заданными показателями качества следует считать целесообраз-

ным подход к его построению с позиций конструктивной вариативности всех его составных частей, в том числе и исполнительного двигателя. Важнейшим параметром, оказывающим существенное влияние на характеристики ЭП и позволяющим оптимизировать целый спектр его технико-экономических показателей [1–4], является число фаз статорной обмотки исполнительного двигателя, в частности синхронного двигателя с постоянными магнитами (СДПМ).

Для углубленного исследования режимов работы  $m$ -фазного СДПМ необходимо наличие его адекватного математического описания. Ниже предлагается модель СДПМ непосредственно в фазных координатах, учитывающая реальное распределение магнитного поля в активной зоне машины с учетом насыщения магнитной цепи, дискретного распределения многофазной обмотки статора по пазам и перемещения зубчатого сердечника статора относительно ротора с постоянными магнитами (ПМ).

В основе анализа режимов работы любой электрической машины лежат дифференциальные уравнения электрического состояния ветвей и электромагнитного момента, а также уравнения движения вращающихся частей. Если пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости и рассматривать обмотки машины как электрические цепи с сосредоточенными параметрами, то уравнения переменного состояния для всех  $m$  фаз обмотки статора СДПМ могут быть представлены в виде следующего матричного уравнения:

$$[u] = \frac{d[\Psi]}{dt} + [R][i], \quad (1)$$

где  $[u] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^t$  – матрица-столбец мгновенных напряжений, приложенных к фазам обмотки статора;  $[\Psi] = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_m]^t$  – матрица-столбец мгновенных потокосцеплений фаз обмотки статора;  $[R] = \text{diag}[R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m]$  – диагональная матрица активных сопротивлений фазных обмоток;  $[i] = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m]^t$  – матрица-столбец мгновенных фазных токов.

К уравнению электрического состояния  $m$ -фазной обмотки статора СДПМ (1) добавляются два уравнения динамики:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(M_\Delta - M_C); \quad \frac{d\alpha}{dt} = \Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega$  – угловая частота вращения ротора;  $J$  – приведенный момент инерции ротора с учетом приводных механизмов;  $M_\Delta$  и  $M_C$  – соответственно электромагнитный момент и момент сопротивления, приложенные к валу ротора;  $\alpha$  – угол поворота ротора относительно статора в момент времени  $t$ .

Потокосцепления фаз обмотки статора  $[\Psi]$  можно представить в виде суммы потокосцеплений от ПМ ротора и фазных токов статора:

$$[\Psi] = [\Psi_0] + [L][i], \quad (3)$$

где  $[\Psi_0] = [\Psi_{10} \ \Psi_{20} \ \dots \ \Psi_{m0}]^t$  – матрица-столбец потокосцеплений фаз, обусловленных ПМ ротора;

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1m} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & L_{m2} & \dots & L_{mm} \end{bmatrix} \text{ – матрица само- и взаим-}$$

моиндуктивностей фаз обмотки статора.

Относительные магнитные проницаемости высококоэрцитивных ПМ близки к единице и го-

раздо меньше магнитных проницаемостей стали статора. Поэтому вполне корректным представляется допущение о том, что насыщение магнитной цепи статора обусловлено действием только постоянных магнитов ротора. На рис. 1 приведены результаты расчета магнитного поля в активной зоне четырехполюсного СДПМ с номинальным моментом  $M_\Delta = 170$  Нм в режимах холостого хода (а) и номинальной нагрузки (б) при повороте оси ротора относительно основной гармоники поля статора на  $\pi/2$  электрических радиан.

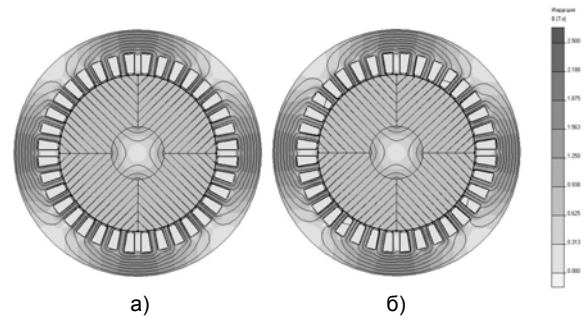


Рис. 1. Результаты расчета магнитного поля в активной зоне СДПМ

Анализ полученных результатов показывает, что насыщение магнитной цепи статора в режиме нагрузки практически не изменилось по сравнению с режимом холостого хода. При этом допущении можно предварительно методами теории поля рассчитать для каждой фазы статора кривые изменения потокосцепления  $\Psi_{\phi 0}(\alpha)$  от постоянных магнитов ротора в функции угла  $\alpha$  с учетом реальной структуры активной зоны СДПМ и насыщения стали. При симметричной магнитной цепи кривая изменения потокосцепления фазы  $\Psi_{\phi 0}(\alpha)$  не содержит четных гармоник и симметрична относительно оси абсцисс, поэтому достаточно рассчитать мгновенные значения кривой потокосцепления фазы на полупериоде ее изменения. При использовании численных методов для этого достаточно произвести расчет поля в активной зоне СДПМ в режиме холостого хода при различных положениях ротора относительно статора, поворачивая ротор на одно зубцовое деление статора [5]. В симметричных СДПМ кривые всех фаз  $\Psi_{\phi 0}(\alpha)$  будут одинаковыми и сдвинуты относительно друг друга на  $2\pi/m$  электрических радиан при нечетном числе фаз и на  $\pi/m$  электрических радиан для одноименных фаз в  $m/n$  симметричных  $n$ -фазных группах гальванически связанных фаз при их четном числе. Следовательно, зная зависимость  $\Psi_{\phi 0}(\alpha)$ , можно определить элементы матрицы  $[\Psi_0]$  при любом значении  $\alpha$ . В качестве примера на рис. 2 приведены кривые  $\Psi_{\phi 0}(\alpha)$  на периоде изменения для трехфазной (1) и девятифазной (2) машин, имеющих одинаковые конструктивные испол-

нения, одинаковые числа витков в катушках и катушек на полюс и фазу:  $q_k = 3$  для трехфазной и  $q_k = 1$  для девятифазной обмоток.

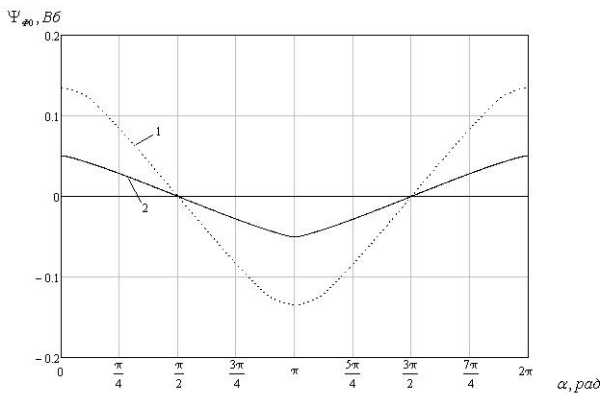


Рис. 2. Зависимости потокосцепления фаз  $\Psi_{\phi_0}(\alpha)$  трехфазного (1) и девятифазного (2) СДПМ

Элементы матрицы  $[L]$  при известном угле  $\alpha$  могут быть определены аналогичным образом. Для этого необходимо рассчитать поле в линеаризованной активной зоне СДПМ ( $\mu = \text{const}$ ) при возбуждении произвольным значением тока в одной из фаз при различных значениях  $0 \leq \alpha < \pi/m$  [5], при этом области, занятые постоянными магнитами, заменяются средами без источников поля, магнитные проницаемости которых равны магнитным проницаемостям ПМ. Если ротор СДПМ не имеет ферромагнитных вставок, то элементы симметричной матрицы  $[L]$  не будут зависеть от угла поворота ротора  $\alpha$  и могут быть определены при расчете поля для одного произвольного взаимного положения сердечников.

С учетом (3) и (2) уравнение (1) можно представить в виде

$$[u] = \Omega \frac{d[\psi_0]}{d\alpha} + [L] \frac{d[i]}{dt} + \Omega \frac{d[L]}{d\alpha} [i] + [R][i]. \quad (4)$$

При отсутствии на роторе СДПМ ферромагнитных вставок элементы матрицы  $[L]$  не зависят от  $\alpha$  и  $d[L] / d\alpha = 0$ .

Электромагнитный момент СДПМ можно найти, применяя закон сохранения энергии к электромеханическому преобразованию в линейной модели нелинейной системы, которое происходит в условиях сохранения постоянными значений токов фаз обмоток статора при малом перемещении ротора [6]:

$$M_{\Sigma} = \frac{\partial W'}{\partial \alpha}, \quad (5)$$

где  $W'$  – полная магнитная коэнергия СДПМ.

Как показано в [6], в линейной модели нелинейной системы полная магнитная коэнергия не отличается от полной энергии и в СДПМ при каком-либо значении  $\alpha$  и с учетом (3) может быть определена по формуле

$$W' = [i]^t [\psi_0] + \frac{1}{2} [i]^t [L] [i]. \quad (6)$$

Приращение коэнергии при малом перемещении ротора  $\partial W' / \partial \alpha$  (5) необходимо определять

при постоянных фазных токах в линейной модели, т. е. при неизменных магнитных проницаемостях стали статора [6]. При принятом допущении о том, что насыщение стали статора обусловлено только действием ПМ, при малом перемещении ротора на угол  $\partial \alpha$  насыщение магнитной цепи статора при неизменных фазных токах практически не изменится. Поэтому величина электромагнитного момента СДПМ (5) при угле  $\alpha$  будет равна

$$M_{\Sigma} = [i]^t \frac{d[\psi_0]}{d\alpha} + \frac{1}{2} [i]^t \frac{d[L]}{d\alpha} [i]. \quad (7)$$

Поскольку зависимости элементов матриц  $[\psi_0]$  и  $[L]$  от угла  $\alpha$  рассчитываются заранее методами теории поля, то зависимости элементов матриц  $d[\psi_0] / d\alpha$  и  $d[L] / d\alpha$  в функции угла  $\alpha$  тоже можно определить заранее и считать известными при известном угле  $\alpha$ . При отсутствии на роторе СДПМ ферромагнитных вставок  $d[L] / d\alpha = 0$  уравнение (7) будет содержать только первое слагаемое. Таким образом, величина электромагнитного момента при известном угле  $\alpha$  в соответствии с (7) будет определяться только значениями фазных токов  $[i]$ . На рис. 3 приведены зависимости  $d\Psi_{\phi_0}(\alpha) / d\alpha$  на периоде их изменения для трехфазного и девятифазного СДПМ.

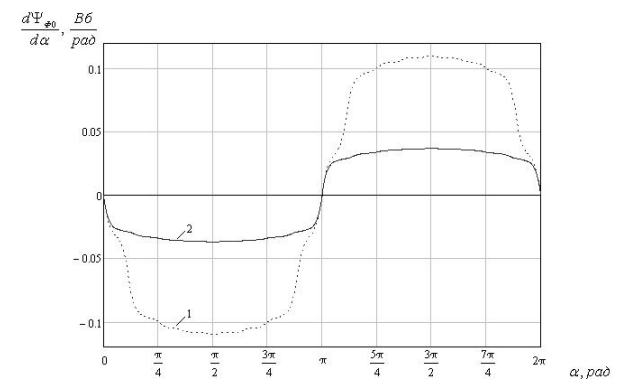


Рис. 3. Кривые изменения производных потокосцеплений фаз: 1 – для трехфазного СДПМ; 2 – для девятифазного СДПМ

Для проверки адекватности принятых допущений были проведены расчеты электромагнитных моментов для трехфазного и девятифазного СДПМ при токах, соответствующих номинальным, для различных углов  $\alpha$  (рис. 4) по (7) и по результатам расчета поля методом конечных элементов при тех же токах с учетом кривой намагничивания стали статора. На рис. 4 значения момента, определенные методом конечных элементов, представлены отдельными точками («крестиками»). Как следует из сопоставления результатов расчета, значения электромагнитного момента, полученные при принятых допущениях (7) и по результату расчета поля в активной зоне, практически совпадают.

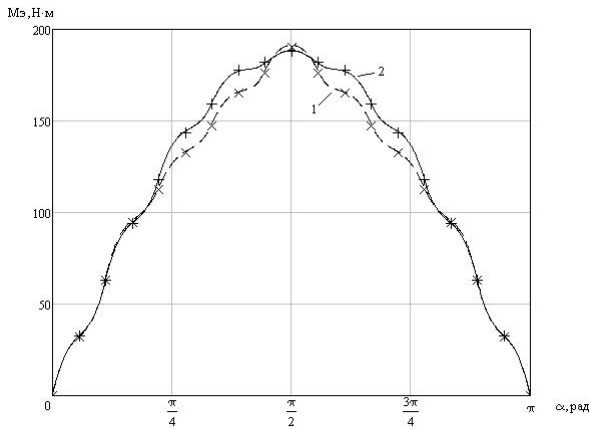


Рис. 4. Зависимости электромагнитного момента от угла  $\alpha$

При известном законе изменения фазных напряжений  $[u]$  во времени уравнения переменных состояния для определения токов  $[i]$  многофазной обмотки (4) в нормальной форме примут вид

$$\frac{d[i]}{dt} = [L]^{-1} \left( [u] - \Omega \frac{d[\psi_0]}{d\alpha} - \Omega \frac{d[L]}{d\alpha} [i] - [R][i] \right). \quad (8)$$

Поскольку значения  $[L]$ ,  $d[\psi_0]/d\alpha$  и  $d[L]/d\alpha$  определяются заранее и при определенном угле  $\alpha$  являются известными, то (8) совместно с (2) при известных начальных значениях токов  $[i(0)]$  легко решить одним из численных методов расчета нелинейных дифференциальных уравнений. Если ротор СДПМ выполнен из ПМ без ферромагнитных вставок или влиянием этих вставок на магнитное поле токов статора можно пренебречь, уравнения (8) и (7) существенно упрощаются:

$$\frac{d[i]}{dt} = [L]^{-1} \left( [u] - \Omega \frac{d[\psi_0]}{d\alpha} - [R][i] \right); \quad (9)$$

$$M_{\Sigma} = [i]^t \frac{d[\psi_0]}{d\alpha}, \quad (10)$$

при этом элементы матрицы  $[L]^{-1}$  будут неизменными при любом угле  $\alpha$ .

Одним из важных требований к электроприводу с СДПМ является улучшение его виброшумовых характеристик, что непосредственно связано с уменьшением пульсаций электромагнитного момента. На рис. 5 приведены кривые изменения электромагнитного момента для трехфазного и девятифазного СДПМ при номинальных синусоидальных фазных токах и установившейся частоте вращения. Анализ полученных результатов показывает, что пульсации момента девятифазного двигателя значительно меньше, их основная частота выше, чем у трехфазного (прямо пропорционально увеличению числа фаз), а средний момент больше. При наличии в системе управления СДПМ обратной связи по фазным токам и углу положения ротора  $\alpha$  предлагаемая модель позволяет формировать кривые фазных токов, обеспечивающих постоянный заданный электромагнитный момент при любом положении ротора относительно статора.

Допустим, как один из вариантов, что при установившейся частоте вращения  $\Omega = \text{const}$  фазные токи статора должны изменяться по синусоидальному закону с амплитудной модуляцией таким образом, чтобы при заданном угле  $\alpha$  относительно оси первой фазы статора величина электромагнитного момента  $M_{\Sigma} = M_C$  оставалась неизменной в любой произвольный момент времени  $t$ . То есть будем считать, что для каждой  $k$ -й ( $1 \leq k \leq m$ ) фазы статора

$$i_k = I_m(t) \sin \left( \omega t + \alpha - \frac{2\pi(k-1)}{m} \right), \quad (11)$$

где  $I_m(t)$  – модулированная амплитуда тока;  $\omega = \Omega / p$  – основная угловая частота;  $p$  – число пар полюсов СДПМ.

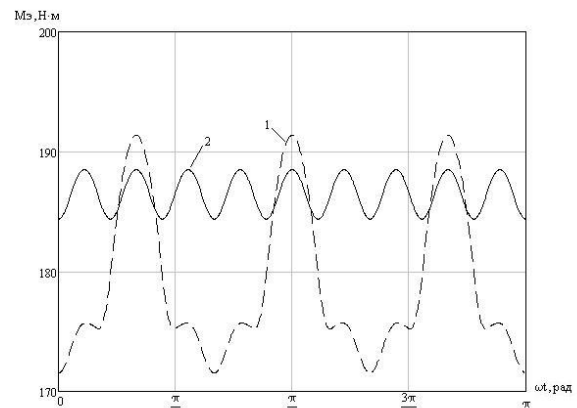


Рис. 5. Пульсации электромагнитного момента: 1 – для трехфазного СДПМ; 2 – для девятифазного СДПМ

Тогда для любого момента времени  $t$  мгновенные фазные токи  $[i]$  могут быть представлены выражением

$$[i] = I_m(t)[S], \quad (12)$$

где

$$[S] = \left[ \sin(\omega t + \alpha) \dots \sin \left( \omega t + \alpha - \frac{2\pi(k-1)}{m} \right) \dots \sin \left( \omega t + \alpha - \frac{2\pi(m-1)}{m} \right) \right]^t.$$

В соответствии с (7) получим

$$M_{\Sigma} = I_m(t)[S]^t \frac{d[\psi_0]}{d\alpha} + \frac{1}{2} I_m^2(t)[S]^t \frac{d[L]}{d\alpha} [S]. \quad (13)$$

Из выражения (13) нетрудно рассчитать кривую  $I_m(t)$  на периоде ее изменения ( $0 \leq t \leq 2\pi / \omega$ ).

Если для СДПМ справедливы уравнения (9) и (10), то выражение (13) существенно упростится:

$$I_m(t) = \frac{M_{\Sigma}}{[S]^t \frac{d[\psi_0]}{d\alpha}}. \quad (14)$$

На рис. 6, 7 представлены кривые изменения мгновенных фазных токов при установившемся режиме соответственно для трехфазного и девятифазного СДПМ, соответствующие постоянному номинальному моменту ис-

следуемого двигателя, а также изменение модулированной амплитуды этих токов  $I_m(t)$  по (14).

Анализ полученных результатов показывает, что при использовании амплитудной модуляции токов для исключения пульсаций электромагнитного момента СДПМ токи всех фаз трехфазного СДПМ, также как и токи всех фаз девятифазного СДПМ, будут иметь одинаковую форму и гармонический состав. При этом амплитудная модуляция тока у девятифазного двигателя гораздо меньше, чем у трехфазного.

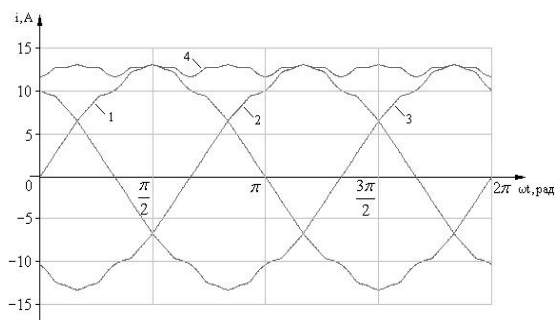


Рис. 6. Кривые изменения фазных токов трехфазного СДПМ при постоянном моменте: 1–3 – фазные токи; 4 – зависимость  $I_m(t)$

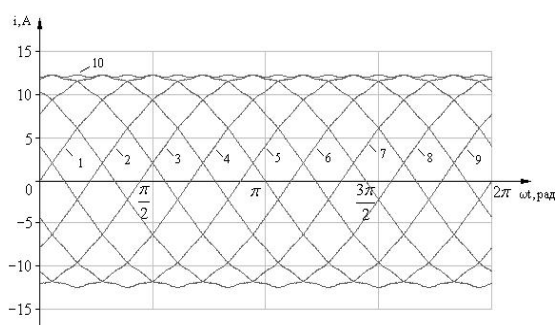


Рис. 7. Кривые изменения фазных токов девятифазного СДПМ при постоянном моменте: 1–9 – фазные токи; 10 – зависимость  $I_m(t)$

### Заключение

Предложенная математическая модель  $m$ -фазного СДПМ позволяет анализировать его статические и динамические режимы работы с учетом реальной структуры магнитного поля в активной зоне.

*Мартынов Владимир Александрович,*

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ электротехники и электротехнологий,  
телефон (4932) 26-99-08,  
e-mail: zav@toe.spu.ru

*Голубев Александр Николаевич,*

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,  
телефон (4932) 26-99-03,  
e-mail: alenikgo@yandex.ru

*Алейников Алексей Владимирович,*

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,  
студент электромеханического факультета,  
телефон (4932) 26-99-03.

Рассмотренный вариант построения синхронного ЭП обладает улучшенными энергетическими и виброшумовыми характеристиками.

### Список литературы

1. Бабаев М.Б., Голубев А.Н., Королев А.Н. Особенности применения многофазных асинхронных двигателей в регулируемом приводе // Электричество. – 1991. – № 11. – С. 57–61.
2. Голубев А.Н., Лапин А.А. Математическая модель синхронного двигателя с многофазной статорной обмоткой // Электротехника. – 1998. – № 9. – С. 8–13.
3. Голубев А.Н., Лапин А.А. Многофазный синхронный электропривод // Электричество. – 2005. – № 2. – С. 43–47.
4. Голубев А.Н., Лапин А.А. Многофазный синхронный регулируемый электропривод / Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2008. – 156 с.
5. Мартынов В.А. Учет взаимного перемещения зубчатых сердечников при расчетах установившихся режимов синхронных машин численными методами // Электричество. – 1985. – № 10. – С. 59–60.
6. Иванов-Смоленский А.В. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах: учеб. пособие для вузов по спец. «Электромеханика». – М.: Высш. шк., 1989. – 312 с.

### References

1. Babaev, M.B., Golubev, A.N., Korolev, A.N. Osobnosti primeneniya mnogofaznykh asinkhronnykh dvigateley v reguliruемом приводе [Specific Features of Applying Polyphase Asynchronous Motors in Regulated Electric Drive]. *Elektrichestvo*, 1991, no. 11, pp. 57–61.
2. Golubev, A.N., Lapin, A.A. Matematicheskaya model' sinkhronnogo dvigatelya s mnogofaznoy statornoy obmotkoy [Mathematical Model of Synchronous Drive with Polyphase Stator Winding]. *Elektrotehnika*, 1998, no. 9, pp. 8–13.
3. Golubev, A.N., Lapin, A.A. Mnogofaznyy sinkhronnyy elektroprivod [Polyphase Synchronous Electric Drive]. *Elektrichestvo*, 2005, no. 2, pp. 43–47.
4. Golubev, A.N., Lapin, A.A. *Mnogofaznyy sinkhronnyy reguliruemyy elektroprivod* [Polyphase Synchronous Regulated Electric Drive]. Ivanovo, 2008. 156 p.
5. Martynov, V.A. Uchet vzaimnogo peremeshcheniya zubchatykh serdechnikov pri raschetakh ustanovivshixsya rezhimov sinkhronnykh mashin chislennymi metodami [Accounting of Relative Motion of Gear Cores while Calculating the Set Modes of Synchronous Machines with Numerical Methods]. *Elektrichestvo*, 1985, no. 10, pp. 59–60.
6. Ivanov-Smolenskiy, A.V. *Elektromagnitnye sily i preobrazovanie energii v elektricheskikh mashinakh: uchebnoe posobie* [Electromagnetic Forces and Energy Transformation in Electric Machines]. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 312 p.